10 Kombinatorikk

10.1 Binomialkoeffisienter

> *restart* :

Koeffisientene i polynomet $(a+b)^n$ kalles binomialkoeffisienter og skrives

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

> $expand\left((a+b)^6\right)$

$$a^6 + 6\,a^5\,b + 15\,a^4\,b^2 + 20\,a^3\,b^3 + 15\,a^2\,b^4 + 6\,a\,b^5 + b^6$$

Maple har en egen kommando for binomialkoeffisientene.

- binomial(n, k) beregner binomialkoeffisienter der n er eksponenten i potensen og k angir den k'te koeffisienten når potensen beregnes, k går fra 0 til n.

Koeffisientene i $(a+b)^n$ fåes ved

> $\binom{6}{0}, \binom{6}{1}, \binom{6}{2}, \binom{6}{3}, \binom{6}{4}, \binom{6}{5}, \binom{6}{6}$

$$1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$$

Eller skrevet litt kortere ved hjelp av seq.

> $seq\left(\binom{6}{k}, k=0..6\right)$

$$1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$$

De 7 første rekkene i Pascal's trekant kan vises slik

> $\binom{0}{0}$; $seq\left(\binom{1}{k}, k=0..1\right)$; $seq\left(\binom{2}{k}, k=0..2\right)$; $seq\left(\binom{3}{k}, k=0..3\right)$; $seq\left(\binom{4}{k}, k=0..4\right)$; $seq\left(\binom{5}{k}, k=0..5\right)$; $seq\left(\binom{6}{k}, k=0..6\right)$

$$1$$
$$1, 1$$
$$1, 2, 1$$
$$1, 3, 3, 1$$
$$1, 4, 6, 4, 1$$
$$1, 5, 10, 10, 5, 1$$
$$1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$$

Ellers viser binomial(n, k) hvor mange måter vi kan velge k elementer ut av n på når rekkefølgen er uten betydning.

10.2 Terningkast

Simulering av kast med en terning kan gjøres i Maple ved kommandoen rand.

- rand( ) gir et tilfeldig tall med 12 siffer

  rand$(a..b)()$ gir et tilfeldig tall mellom a og b

• TilfeldigTall (a, b, n) gir n tilfeldige tall mellom a og b

$$a, b, n$$

> $rand(\,)$

$$620436917936$$

> $rand(1..6)(\,)$

$$1$$

50 terningkast gir:

> $L := TilfeldigTall(1, 6, 50)$

$L := [5, 1, 1, 5, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 1, 6, 2, 4, 5, 4, 3, 4, 1, 3, 4, 6, 4, 6, 3, 4, 3, 2, 5, 2, 2, 4, 3, 6, 5, 3, 5, 4, 3, 5, 2, 5, 4, 4, 4, 2, 2, 5, 5, 3]$

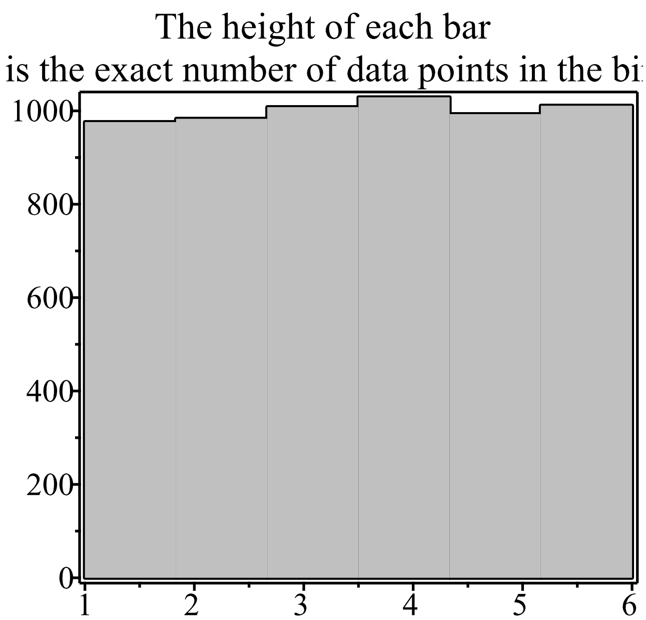
> $sort(L)$

$[1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6]$

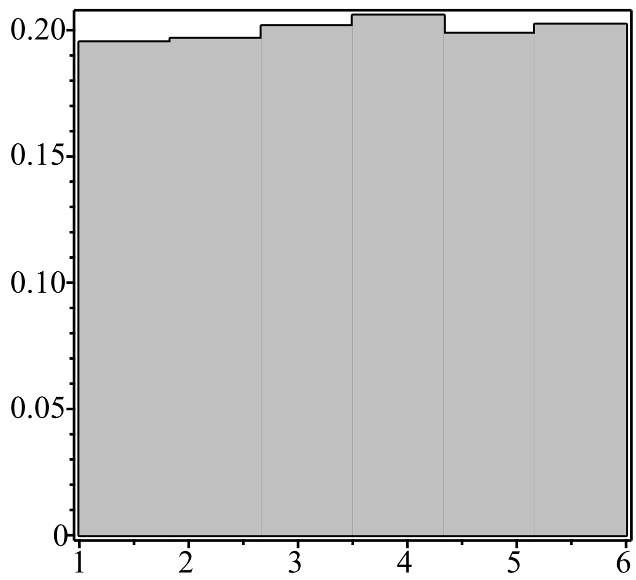
Med 6000 terningkast kan resulatet se slik ut:

> $T := TilfeldigTall(1, 6, 6000):$

> $HistoGram(T, \mathrm{abs}, 6, color = grey)$



> $HistoGram(T, rel, 6, color = grey, title = ``)$



> $FrekvensTabell(T, 6, 4)$

$$\left[\begin{array}{ccccc} \textit{Klassebredde} & \textit{Antall} & \textit{Prosent} & \textit{Antall(kumulativ)} & \cdots \\ 1...1.833 & 976. & 16.27 & 976. & \cdots \\ 1.833..2.667 & 983. & 16.38 & 1959. & \cdots \\ 2.667..3.500 & 1008. & 16.80 & 2967. & \cdots \\ 3.500..4.333 & 1029. & 17.15 & 3996. & \cdots \\ 4.333..5.167 & 993. & 16.55 & 4989. & \cdots \\ 5.167..6. & 1011. & 16.85 & 6000. & \cdots \end{array}\right]$$

Prosenttallene er noe forskjellig. Kaster vi mange nok ganger bør det være 16.67 % sannsynliget for at vi får opp ett av tallene fra 1 til 6.

> *Middelverdi*([16.68, 17.52, 16.53, 15.87, 16.58, 16.82])

$$16.6666666666667$$

10.3 Mengdeoperasjoner

> *restart* :

Unionen av to hendelser A og B betegnes $A \cup B$.

- A union B definerer unionen mellom mengdene A og B, $A \cup B$
- A intersect B definerer snittet mellom mengdene A og B, $A \cap B$
- A minus B definerer mengdedifferensen $A \setminus B$

> \`A union B\`=A union B; $A\ union\ B = A \cup B$	**> \`A intersect B\`=A intersect B;** $A\ intersect\ B = A \cap B$	**> \`A minus B\`=A minus B;** $A\ minus\ B = A \setminus B$

Eksempel 10.3.1

Gitt mengdene $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$
og mengdene $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $C = \{1, 11, 12, 13\}$
Finn $B \cup C$, $B \cap C$, $A \setminus B$, $A \setminus C$

Løsning

> $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

$$A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$$

> $B := \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

$$B := \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

> $C := \{1, 11, 12, 13\}$

$$C := \{1, 11, 12, 13\}$$

> `B ∪ C` = B **union** C

$$B \cup C = \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 13\}$$

> `B ∩ C` = B **intersect** C

$$B \cap C = \{12\}$$

> `A \ C` = A **minus** C

$$A \setminus C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

> `A \ B` = A **minus** B

$$A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$$

10.4 Kombinatorikk

- n! beregner n-fakultet

> `10!` = 10!

$$10! = 3628800$$

Enhver ordning av et antall elementer kaller vi en permutasjon av elementene.

Ordnet utvalg uten tilbakelegging

- permute (L) gir en liste med alle permutasjoner av elementer i listen eller mengden L

Et utvalg av elementer der rekkefølgen er av betydning kalles et **ordnet utvalg**. En liste i Maple (elementer i en hakeparentes, [ ]) er et ordnet utvalg. Trekker vi ut et element fra en liste med elementer r ganger etter hverandre uten å legge tilbake det elementet vi trakk ut, får vi det som kalles ordnede utvalg uten tilbakelegging.

- permute (L, r) gir en liste med ordnede utvalg på r elementer trukket fra listen L
- numbperm(L) antall permutasjoner

  numbperm(L, r) antall permutasjoner r elementer i listen L

Uordnet utvalg uten tilbakelegging

Når vi ikke tar hensyn til rekkefølgen av elementene i et utvalg har vi et uordnet utvalg.

- choose(L) gir en liste /mengde med uordnede utvalg i listen/mengden L

  choose(L, r) gir en liste/mengde med uordnede utvalg der r elementer i L kombineres

- numbcomb(L) eller numbcomb(L, r) gir antall uordnede utvalg (= binomial (L, r))

> *with*(*combinat*) :

Eksempel 10.4.1

a) Skriv ned alle permutasjoner av elementene i listene
[1, 2], [1, 2, 3], [1, 2, 3, 4]

b) Hvor mange tosifrede tall kan vi lage av sifrene 1, 2, 3, 4, 5 når hvert siffer bare skal forekomme én gang i tallet?

Løsning

> a)

> $L := [1, 2]$

> $permute(L)$

$$L := [1, 2]$$

$$[[1, 2], [2, 1]]$$

> $numbperm(L)$

$$2$$

> $L := [1, 2, 3]:$

> $permute(L)$

$$[[1, 2, 3], [1, 3, 2], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1]]$$

> $numbperm(L)$

$$6$$

> $L := [1, 2, 3, 4]:$

> $permute(L)$

$$[[1, 2, 3, 4], [1, 2, 4, 3], [1, 3, 2, 4], [1, 3, 4, 2], [1, 4, 2, 3], [1, 4, 3, 2], [2, 1, 3, 4], [2, 1, 4, 3], [2, 3, 1, 4], [2, 3, 4, 1], [2, 4, 1, 3], [2, 4, 3, 1], [3, 1, 2, 4], [3, 1, 4, 2], [3, 2, 1, 4], [3, 2, 4, 1], [3, 4, 1, 2], [3, 4, 2, 1], [4, 1, 2, 3], [4, 1, 3, 2], [4, 2, 1, 3], [4, 2, 3, 1], [4, 3, 1, 2], [4, 3, 2, 1]]$$

> $numbperm(L)$

$$24$$

> b)

> $L := [1, 2, 3, 4, 5]:$

> $permute(L, 2)$

$$[[1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [2, 1], [2, 3], [2, 4], [2, 5], [3, 1], [3, 2], [3, 4], [3, 5], [4, 1], [4, 2], [4, 3], [4, 5], [5, 1], [5, 2], [5, 3], [5, 4]]$$

> $numbperm(L, 2)$

$$20$$

Eksempel 10.4.2

Hvor mange delmengder med tre elementer har mengden {1, 2, 3, 4, 5}?
Hvor mange tresifrede tall kan vi lage av sifrene 1, 2, 3, 4, 5 når hvert siffer bare kan forkomme én gang i tallet og sifrenes rekkefølge er uten betydning?

Løsning

> $L := [1, 2, 3, 4, 5]$

$$L := [1, 2, 3, 4, 5]$$

> $choose(L, 3)$

$$[[1, 2, 3], [1, 2, 4], [1, 2, 5], [1, 3, 4], [1, 3, 5], [1, 4, 5], [2, 3, 4], [2, 3, 5], [2, 4, 5], [3, 4, 5]]$$

> $numbcomb(L, 3)$

$$10$$

som er det samme som

> $Binomial(5, 3) = \binom{5}{3}$

>

$$Binomial(5, 3) = 10$$

Eksempel 10.4.3

I Lotto blir det trukket sju vinnertall av 34 tall. I tillegg skal det trekkes tre tilleggstall.
Regn ut vinnersjansene når du tipper én rekke (sju tall) for å få
a) førstepremie (sju rette)

b) andrepremie (seks rette + ett tilleggstall)
c) fjerdepremie (fem rette)
d) femtepremie (fire rette + ett tilleggstall)

Løsning

> restart:

a)

Binomial(n, r) gir antall mulige måter å velge r tall av n på. Sannsynlighet for å vinne førstepremie er

$$> P(7\,r) = \frac{1}{\binom{34}{7}}$$

$$P(7\,r) = \frac{1}{5379616}$$

$> evalf(\%, 3)$

$$P(7\,r) = 1.86 \times 10^{-7}$$

$$> P(6\,r + t) = \frac{\binom{7}{6}\binom{3}{1}\binom{24}{0}}{\binom{34}{7}}$$

$$P(6\,r + t) = \frac{21}{5379616}$$

$> evalf(\%, 3)$

$$P(6\,r + t) = 3.90 \times 10^{-6}$$

Produktet over består av:

Måter å velge seks av sju tall:

$$> '\binom{7}{6}' = \binom{7}{6}$$

$$\binom{7}{6} = 7$$

Måter å velge ett av tre tall:

$$> '\binom{3}{1}' = \binom{3}{1}$$

$$\binom{3}{1} = 3$$

Ingen av de andre 24 tallene er med. Måter å velge 0 av 24 tall:

$$> '\binom{24}{0}' = \binom{24}{0}$$

$$\binom{24}{0} = 1$$

Maplekommandoen

- Lotto(*lotto*) skriver ut en Lotto kupong

c)

$$> P(5\,r) = \frac{\binom{7}{5}\binom{27}{2}}{\binom{34}{7}}$$

$$P(5\,r) = \frac{7371}{5379616}$$

$> evalf(\%)$

$$P(5\,r) = 0.001370172146$$

Det blir premie om du har ett, to eller tre tilleggstall.

$$> P(4\,r + t) = \frac{1}{\binom{34}{7}}\left(\binom{7}{4}\binom{3}{1}\binom{24}{2} + \binom{7}{4}\binom{3}{2}\binom{24}{1} + \binom{7}{4}\binom{3}{3}\binom{24}{0}\right)$$

$$P(4\,r + t) = \frac{1855}{316448}$$

$> evalf(\%, 3)$

$$P(4\,r + t) = 0.00586$$

Lotto(*vikinglotto*) skriver ut en Viking-Lotto kupong

> *Lotto*(*lotto*)	> *Lotto*(*vikinglotto*)
Lotto	*Viking Lotto*

$$\left[\begin{array}{cccccc} 6 & 16 & 18 & 25 & 27 & \cdots \\ 8 & 11 & 12 & 19 & 26 & \cdots \\ 1 & 3 & 4 & 7 & 10 & \cdots \\ 19 & 20 & 23 & 24 & 25 & \cdots \\ 6 & 8 & 12 & 24 & 27 & \cdots \\ 2 & 9 & 17 & 23 & 25 & \cdots \\ 3 & 5 & 18 & 22 & 25 & \cdots \\ 6 & 8 & 14 & 29 & 31 & \cdots \\ 3 & 8 & 18 & 22 & 23 & \cdots \\ 1 & 3 & 6 & 8 & 9 & \cdots \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 4 & 7 & 13 & 17 & 18 & \cdots \\ 12 & 13 & 22 & 33 & 38 & \cdots \\ 15 & 24 & 32 & 33 & 35 & \cdots \\ 7 & 11 & 16 & 36 & 42 & \cdots \\ 4 & 13 & 17 & 23 & 35 & \cdots \\ 13 & 15 & 22 & 23 & 43 & \cdots \\ 4 & 18 & 24 & 29 & 41 & \cdots \\ 9 & 10 & 21 & 24 & 40 & \cdots \\ 7 & 15 & 22 & 41 & 43 & \cdots \\ 23 & 26 & 27 & 29 & 34 & \cdots \end{array}\right.$$

>